



MATEMÁTICA APLICADA

CEF OI – 1º Tipo 2

Professor João Narciso

Ficha de Trabalho 24 – Rectas e planos: paralelismo e perpendicularidade

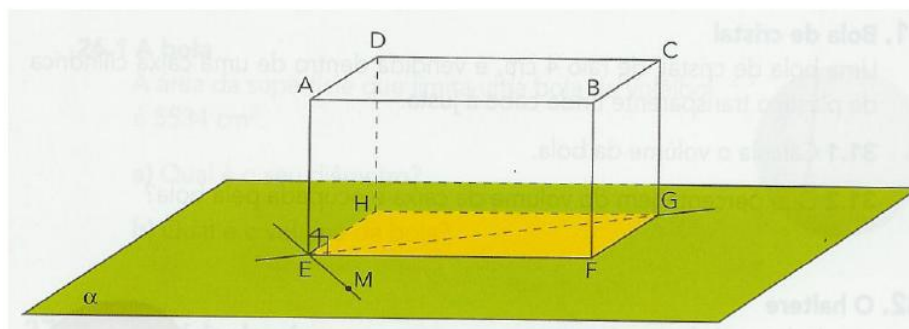
Rectas e Planos no Espaço

Ao recordar as posições relativas de rectas e planos no espaço, **convém que conheças algumas maneiras** convencionais **de representar planos e rectas no espaço** a três dimensões.

Para imaginar planos e rectas do espaço recorre a objectos que te rodeiam, usando, por exemplo, **folhas para representar planos** e **lápiz para representar rectas**.

Mas não te esqueças que rectas e planos são conjuntos ilimitados, ou seja, têm um número infinito de pontos.

Observa o desenho, em perspectiva, de um **paralelepípedo rectângulo**.



- Cada **aresta** deste sólido é um **segmento de recta**.
- Cada **face** deste sólido é uma **porção de plano**.
- Um **plano** representa-se por um **paralelogramo** e designa-se por:
 - três pontos não colineares (não alinhados) desse plano, **por exemplo**, ABC ou ADB ou outro.
 - **uma só letra** grega, **por exemplo**, α (alfa), que neste caso designa o plano que contém a face [EFGH].

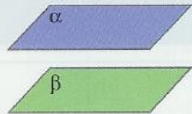
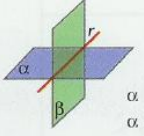
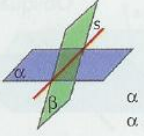
INFORMAÇÃO

Um **plano** pode ser definido por:

- três pontos não colineares;
- uma recta e um ponto exterior à recta;
- duas rectas paralelas;
- duas rectas concorrentes.

Posição relativa de dois planos no espaço

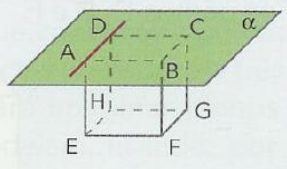
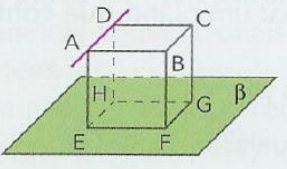
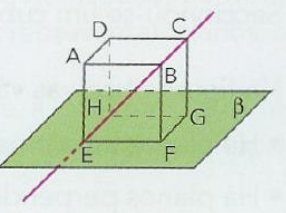
No quadro seguinte apresenta-se um resumo das **posições relativas de dois planos**.

INFORMAÇÃO		
Planos Paralelos	Estritamente paralelos	 $\alpha // \beta$ $\alpha \cap \beta = \emptyset$
	Coincidentes	 $\alpha \equiv \beta$ $\alpha \cap \beta = \alpha$ ou $\alpha \cap \beta = \beta$
Planos Concorrentes	Perpendiculares	 $\alpha \perp \beta$ $\alpha \cap \beta = r$
	Oblíquos	 $\alpha \not\perp \beta$ $\alpha \cap \beta = s$

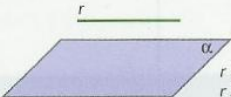
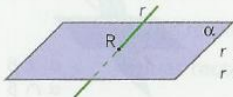
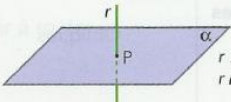
Posição relativa de uma recta e de um plano

Uma recta pode ser **paralela** a um plano, **concorrente** a um plano ou **ser aposta (ou contida)** a um plano.

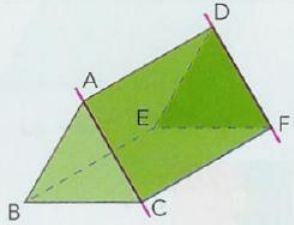
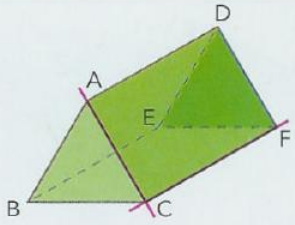
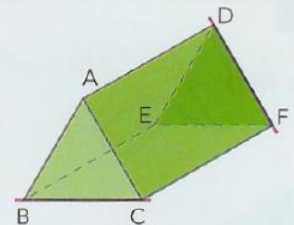
Observa:

 A recta AD está contida no plano α — todos os pontos da recta AD são pontos do plano α.	 A recta AD é paralela ao plano β — nenhum ponto da recta AD pertence ao plano β.	 A recta EC é concorrente oblíqua ao plano β — o ponto E pertence à recta EC e ao plano β. A recta FB é concorrente perpendicular ao plano β.
---	--	--

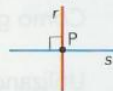
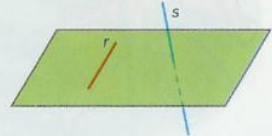
INFORMAÇÃO

Recta contida no plano	 $r \cap \alpha = r$
Recta estritamente paralela ao plano	 $r \parallel \alpha$ $r \cap \alpha = \emptyset$
Recta concorrente com o plano	Oblíqua  $r \not\perp \alpha$ $r \cap \alpha = \{R\}$ Perpendicular  $r \perp \alpha$ $r \cap \alpha = \{P\}$

Posição relativa de duas rectas

 As rectas AC e DF estão contidas no mesmo plano – dizem-se complanares . A recta AC é estritamente paralela à recta DF.	 As rectas AC e CF são complanares mas, como têm um ponto comum, C, dizem-se rectas concorrentes .	 Não existe nenhum plano que contenha, ao mesmo tempo, as rectas BC e DF. As rectas BC e DF dizem-se não complanares .
--	---	--

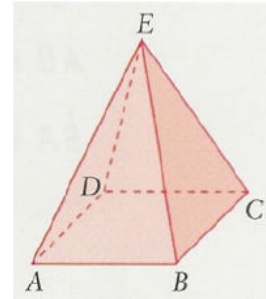
INFORMAÇÃO

Rectas no espaço	Complanares	Concorrentes	Oblíquas  $r \not\perp s$ $r \cap s = \{R\}$
		Perpendiculares	 $r \perp s$ $r \cap s = \{P\}$
		Estritamente paralelas	 $r \parallel s$ $r \cap s = \emptyset$
		Coincidentes	 $r \equiv s$ $r \cap s = r$ ou $r \cap s = s$
	Não complanares		

Exercícios:

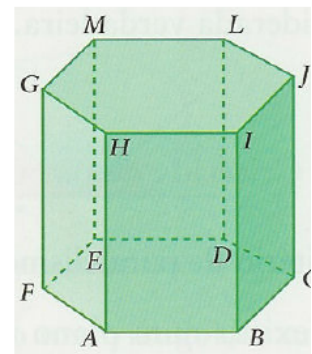
1. Observa a figura e diz, **justificando**, o **valor lógico** de cada uma das seguintes afirmações:

- 1.1. As **rectas** AB e CE são **complanares**;
- 1.2. As **rectas** AB e BE são **estritamente paralelas**;
- 1.3. As **rectas** AB e DC são **perpendiculares**;
- 1.4. Os **planos** ABC e BCE são **concorrentes perpendiculares**.



2. A figura representa um **prisma hexagonal regular**.
Utilizando as letras da figura:

- 2.1. Indica:
 - 2.1.1. **dois planos paralelos**;
 - 2.1.2. **dois planos perpendiculares**;
 - 2.1.3. **dois planos concorrentes e oblíquos**.
- 2.2. Indica **uma recta** e **um plano** de modo que:
 - 2.2.1. a **recta** seja **aposta ao plano**;
 - 2.2.2. a **recta** seja **estritamente paralela ao plano**;
 - 2.2.3. a **recta** seja **perpendicular ao plano**;
 - 2.2.4. a **recta** seja **oblíqua** relativamente **ao plano**.
- 2.3. Indica **duas rectas**:
 - 2.3.1. **não coplanares**;
 - 2.3.2. **coplanares e paralelas**;
 - 2.3.3. **coplanares e concorrentes**;
 - 2.3.4. **coplanares e perpendiculares**.



3. Na figura está representado um **prisma recto pentagonal regular**.

3.1. Qual a posição relativa das rectas que contêm:

3.1.1. as arestas [GH] e [IJ]?

3.1.2. as arestas [AE] e [FJ]?

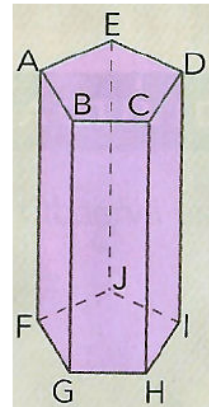
3.1.3. as arestas [DE] e [AF]?

3.2. Utilizando as letras da figura indica:

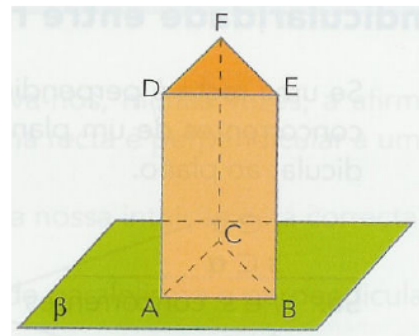
3.2.1. dois planos paralelos;

3.2.2. dois planos perpendiculares;

3.2.3. uma recta perpendicular ao plano FHI.



4. A figura representa um **prisma recto triangular regular** cuja **base** [ABC] está **contida** no plano β .



4.1. Indica a **posição relativa**:

4.1.1. da recta BE e do plano β ;

4.1.2. da recta EF e do plano β ;

4.1.3. da recta AC e do plano β ;

4.1.4. do plano que contém a face [ACFD] e do plano β ;

4.1.5. dos planos que contêm as faces [ACFD] e [CBEF].

4.2. Sabendo que o **comprimento da aresta lateral** é 6 cm e o **comprimento da aresta da base** é metade, calcula:

4.2.1. a **área lateral** do prisma;

4.2.2. o **volume** do prisma.

5. Na figura está representado um **prisma quadrangular regular**.

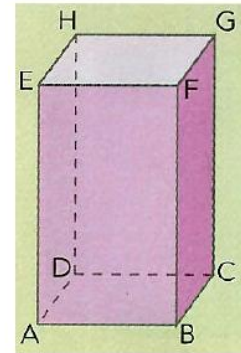
5.1. Diz, **justificando**, se são **verdadeiras ou falsas** as afirmações seguintes:

5.1.1. **O ponto B e a recta AD não definem um plano;**

5.1.2. **As rectas AB e HG definem um plano;**

5.1.3. **O plano EFG não é perpendicular ao plano ABC;**

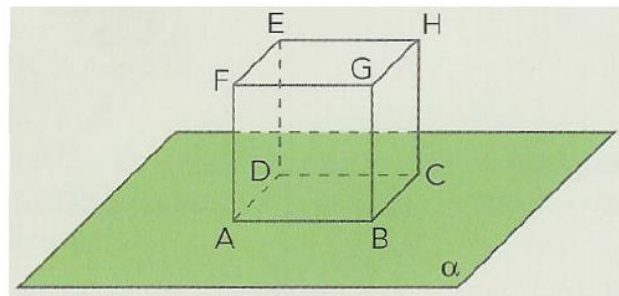
5.1.4. **As rectas AD e FG são não coplanares.**



5.2. Uma jarra com a forma deste prisma e que tem por **dimensões**

$10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 16,5\text{ cm}$, **poderá levar** $\frac{7}{4}\ell$ de água?

6. A figura representa um **cubo** cuja face [ABDD] está no plano α .



6.1. Indica **dois planos** aos quais pertençam os pontos F e H;

6.2. Indica **dois planos** que contenham a recta AB;

6.3. **Qual a posição** relativa **das rectas** GD e EC?

6.4. **Utilizando letras da figura**, indica:

6.4.1. **duas rectas perpendiculares;**

6.4.2. **um plano perpendicular ao plano** α .

6.5. Justifica que **o ponto H e a recta AB definem um plano.**