

## Ficha de Trabalho Nº10 – Equação Vectorial da recta e Equação Reduzida

### ➤ Equação Vectorial da Recta

Dado um ponto  $A$  e um vector não nulo  $\vec{u}$ , podemos definir uma recta  $r$ , que passa pelo ponto  $A$  e tem a direcção do vector  $\vec{u}$ , através da **equação vectorial da recta  $r$** , dada por:

$$\boxed{P = A + k\vec{u}, \quad k \in \mathbb{R}}$$
 , onde  $P$  é um ponto qualquer dessa recta.

Diz-se que  $\vec{u}$  é um **vector director** de  $r$ .

Na figura pode observar a recta  $r$  e o vector  $\vec{u}$ .

Repare que:

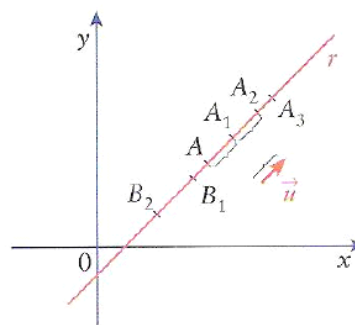
$$A_1 = A + \vec{u}$$

$$A_2 = A + 2\vec{u}$$

$$A_3 = A + 2,5\vec{u}$$

$$B_1 = A - 0,5\vec{u}$$

$$B_2 = A - 2\vec{u}$$



De um modo geral, sendo  $P$  um ponto qualquer da recta, tem-se que:

$$P = A + k\vec{u}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Assim,

- No plano, uma **equação vectorial** da recta  $r$  que passa no ponto  $A(x_A, y_A)$  e tem a direcção

do vector  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  é dada por:  $\boxed{(x, y) = (x_A, y_A) + k(u_1, u_2), \quad k \in \mathbb{R}}$

- No espaço, uma **equação vectorial** da recta  $r$  que passa no ponto  $A(x_A, y_A, z_A)$  e tem a

direcção do vector  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  é dada por:

$$\boxed{(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + k(u_1, u_2, u_3), \quad k \in \mathbb{R}}$$

Exemplos de Aplicação:

**Ex1:**

Escreve a **equação vectorial** da recta que passa pelo ponto  $(-6, 1)$  e tem a direcção de  $\vec{v} = (1, -2)$ .

**Ex2:**

Escreve a **equação vectorial** da recta que passa pelos pontos  $A(-1, 0, 2)$  e  $B(3, -2, 1)$ .

**Ex3:**

Escreve a **equação vectorial** da recta que passa pelo ponto  $(1, -2)$  e que é paralela à recta de equação  $(x, y) = (0, 1) + k(-2, 4)$ ,  $k \in \mathfrak{R}$ .

**Ex4:**

Averigua se o ponto  $(-6, 11)$  pertence à recta de equação  $(x, y) = (0, 1) + k(-2, 4)$ ,  $k \in \mathfrak{R}$ .

**Ex5:**

Considera os pontos  $A = (-2, 3, 1)$ ,  $B = (1, 5, -3)$  e  $C = (-2, 2, 0)$ . Escreve a **equação vectorial** da recta que passa pelo contém o ponto C e que é paralela à recta AB.

**Ex6:**

Verifica se as rectas seguintes são paralelas:

$$s: (x, y, z) = (3, 0, -4) + k(3, 0, -4), k \in \mathfrak{R} \text{ e } r: (x, y, z) = (0, 1, 0) + k(6, 0, -8), k \in \mathfrak{R}$$

➤ **Equação reduzida da recta no plano**

Chama-se equação reduzida de uma recta, não vertical, à equação do tipo  $y = mx + b$ , em que  $m$  é o declive da recta e  $b$  a ordenada na origem.

**Nota1:** Só existe equação reduzida da recta no plano.

**Nota2:** Nas rectas verticais, não é possível determinar o declive, por isso não existe equação reduzida.

**Nota3:** O declive  $m$  de uma recta que contém os pontos  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$  é dado pela

fórmula:  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ . Se o vector director da recta é  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  então  $m = \frac{u_2}{u_1}$ .

**Nota4:** Duas rectas são paralelas se tiverem o mesmo declive.

*Exemplo de como se passa de uma equação vectorial para uma equação reduzida:*

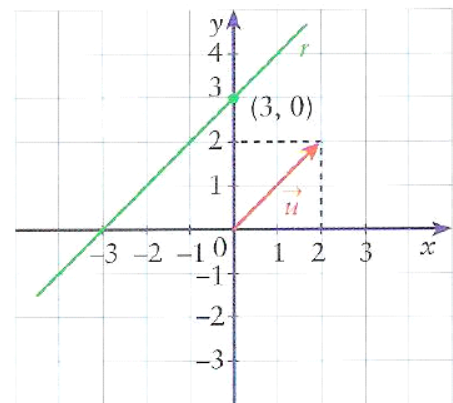
Uma equação vectorial da recta  $r$  é:

$$(x, y) = (3, 0) + k(2, 2), \quad k \in \mathbb{R}.$$

A partir desta é possível obter outra equação da recta.

Com efeito, tem-se:

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 0 + 2k, \quad k \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{Forma-se um sistema de equações.}$$



Resolvendo as duas equações em ordem a  $k$ , vem:

$$\begin{cases} k = \frac{x-3}{2} \\ k = \frac{y}{2}, \quad k \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{Resolvem-se as equações em ordem a } k.$$

Daqui resulta que:

**Equação cartesiana**

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow \quad \text{Repare que apenas escrevemos } k = k$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = y \Leftrightarrow \quad \text{Resolve-se a equação em ordem a } y.$$

$$\Leftrightarrow y = x - 3$$

À equação  $y = x - 3$  chama-se **equação reduzida da recta**.



Exemplos de Aplicação:

**Ex1:**

Escreve a **equação reduzida** da recta  $(x, y) = (1, 2) + k(3, 1)$ ,  $k \in \mathfrak{R}$

**Ex2:**

Escreve a **equação reduzida** da recta que passa  $A(-1, 0)$  e direcção de  $\vec{v} = (1, -2)$ .

**Ex3:**

Escreve a **equação reduzida** da recta AB, onde  $A = (1, 2)$  e  $B = (5, 6)$ .

**Ex4:**

Averigua se o ponto  $(3, 5)$  pertence à recta de equação  $y = 2x - 1$

**Ex5:**

Escreve a **equação vectorial** da recta definida pela equação  $y = 2x - 1$ .

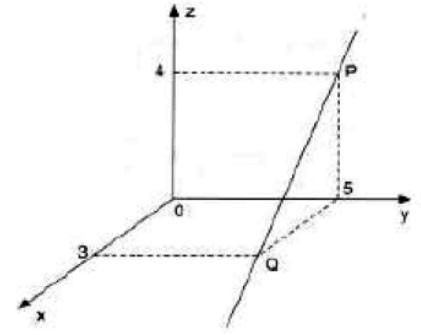
**Ex6:**

Escreve a **equação reduzida** da recta que passa pelo ponto  $A(-1, 2)$  e que é paralela à recta de equação  $(x, y) = (1, 2) + k(-2, 2)$ ,  $k \in \mathfrak{R}$ .

## 1ª Parte – Escolha Múltipla

1. No Referencial da figura, o ponto P pertence ao plano  $yOz$  e o ponto Q pertence ao plano  $xOy$ . Qual das condições seguintes define a recta que passa pela origem e é paralela a PQ?

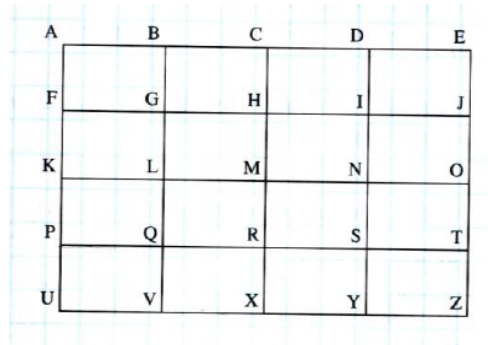
- (A)  $(x, y, z) = k(3, 0, -4)$ ,  $k \in \mathfrak{R}$                       (C)  $x = 3 \wedge y = 5 \wedge z = 0$   
 (B)  $(x, y, z) = (3, 5, 0) + k(3, 0, -4)$ ,  $k \in \mathfrak{R}$                       (D)  $x = 3 \wedge y = 5$



2. A figura representa um rectângulo dividido em dezasseis rectângulos geometricamente iguais.

Qual das seguintes afirmações é falsa?

- (A)  $2\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{PR}$   
 (B)  $U + \frac{1}{2}\overrightarrow{RJ} = M$   
 (C)  $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{QG} = \overrightarrow{OC}$   
 (D)  $\overrightarrow{LO} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{LY}$



3. Considere os vectores  $\vec{u} = (0, 1)$  e  $\vec{v} = (0, -4)$ . Qual das seguintes afirmações é verdadeira:

- (A)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são colineares e  $\|\vec{v}\| = -4\|\vec{u}\|$                       (C)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são colineares e  $\|\vec{v}\| = -4\|\vec{u}\|$   
 (B)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são colineares e  $\vec{v} = -4\vec{u}$                       (D)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são colineares e  $\vec{v} = -4\vec{u}$

4. Considere os vector  $\vec{u} = (1, m)$  e  $\vec{v} = (-2, 3)$ . Para que os vectores sejam colineares, o valor de  $m$  terá que ser igual a:

- (A) 2                      (B)  $\frac{3}{2}$                       (C)  $-\frac{3}{2}$                       (D) Nenhuma das respostas anteriores

5. Considere os pontos A(1, -1) e B(0, 3). A equação da recta AB fica definida por:

- (A)  $(x, y) = (1, -1) + k(-1, -4)$ ,  $k \in \mathfrak{R}$                       (B)  $(x, y) = (0, 3) + k(-1, 4)$ ,  $k \in \mathfrak{R}$   
 (C)  $(x, y) = k(1, 2)$ ,  $k \in \mathfrak{R}$                       (D)  $y = 4x + 3$

6. A recta  $r$  que passa pelo ponto A(-1, 0) e tem a direcção do vector  $\vec{u} = (-1, 2)$  tem por equação:

- (A)  $y = -2x - 2$                       (B)  $y = -2x + 2$                       (C)  $y = -2x$                       (D)  $y = -\frac{1}{2}x + 2$

7. O ponto de intersecção das rectas  $r: (x, y) = (0, -2) + k(-1, 3)$ ,  $k \in \mathfrak{R}$  e  $s: y = x + 2$ , é:

- (A) (0, -2)                      (B) (-1, 3)                      (C) (-1, 2)                      (D) (1, 2)

8. Considere, num referencial ortonormado do plano, a recta  $r$  de equação  $y = 2x - 1$  e o ponto  $A(1, 5)$ . Qual das seguintes condições define a recta paralela a  $r$  e que contém o ponto  $A$ ?

- (A)  $y = 2x + 5$       (B)  $y = \frac{1}{2}x + 5$       (C)  $y = 2x + 3$       (D)  $y = \frac{1}{2}x + 3$

## 2ª Parte

1. No referencial o.n.  $(O, \vec{e}, \vec{f}, \vec{g})$  está representado um paralelepípedo rectângulo em que  $\overline{AD} = 4$ ;  $\overline{DC} = 3$  e  $\overline{GC} = 5$ .

- 1.1. Usando as letras assinaladas na figura, completa:

1.1.1.  $H + \dots = B$

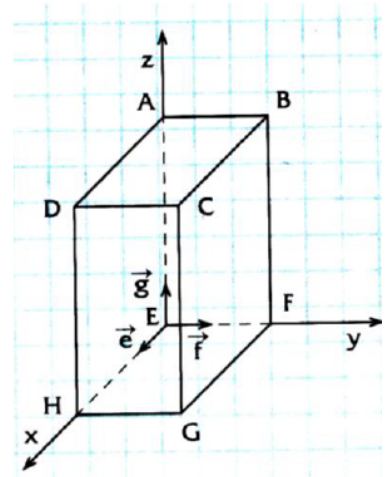
1.1.2.  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CG} = \dots$

1.1.3.  $\overrightarrow{DG} - \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{FB} = \dots$

- 1.2. Determina a norma de  $\overrightarrow{BH}$ .

- 1.3. Escreve a equação vectorial da recta  $HG$ .

- 1.4. Escreve a equação vectorial da recta que passa pelo ponto  $D$  e é paralela a  $BH$ .



2. Considera o vector  $\vec{v} = (1, -2)$  e a recta  $r: (x, y) = (0, 1) + k(-2, 4), k \in \mathfrak{R}$

- 2.1. Averigua se o ponto  $(-6, 11)$  pertence à recta  $r$ .

- 2.2. Prova que o vector  $\vec{v}$  é um vector director da recta  $r$ .

- 2.3. Calcula as coordenadas de um vector  $\vec{w}$  colinear com o vector  $\vec{v}$  e de norma  $\sqrt{20}$ .

3. Considera a recta de equação  $(x; y) = (1; -3) + k(-3; 6), k \in \mathfrak{R}$  e o ponto  $P(-1; 2)$ .

- 3.1. Determina a equação reduzida da recta.

- 3.2. Verifica se o ponto  $P$  pertence à recta dada.

- 3.3. Uma recta cujo vector director seja  $\vec{u} = (2; -4)$  é paralela à recta dada? **Justifica**.

- 3.4. Indica as **coordenadas de um ponto**  $Q$ , tal que o vector  $\overrightarrow{PQ}$  seja colinear com o vector

$\vec{u} = (0; 1)$  e de forma a que  $\|\overrightarrow{PQ}\| = 2$ .