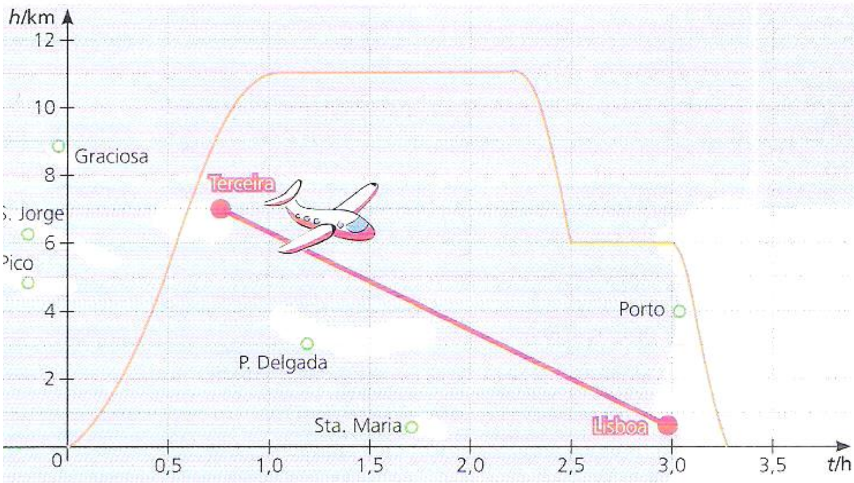
Ficha de Trabalho Nº11 – *Generalidades sobre Funções*

1. Introdução ao conceito de função

Um avião descola do aeroporto das Lajes, na ilha Terceira, nos Açores, em direção ao aeroporto da Portela em Lisboa. Quando chega a Lisboa é obrigado a dar algumas voltas sobre o aeroporto antes de ter autorização para aterrar.

O gráfico seguinte dá-nos a **altitude** do avião, em *quilómetros*, em função do **tempo**, em *horas*, desde que desloca até que aterra na Portela.



1.1. Quanto tempo o avião demorou a atingir a altitude máxima?

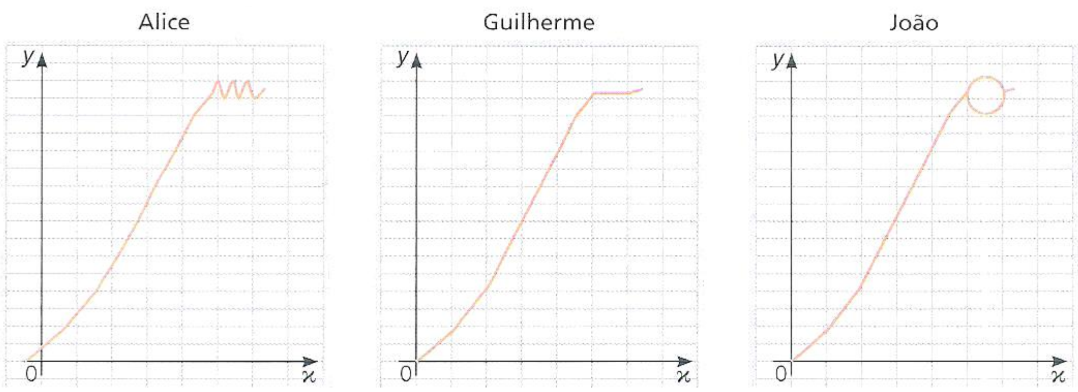
1.2. Qual a altitude máxima atingida pelo avião?

1.3. Após 2,5 horas de viagem a que altura estava o avião?

1.4. A viagem demorou quantas horas? Se o avião descolou das Lajes às 15 horas, a que horas aterrou?

1.5. Quanto tempo esteve o avião em espera antes de aterrar?

1.6. Três alunos apresentaram uma possível representação gráfica da distância que o avião percorreu desde que descolou até que aterrou. Só uma pode representar a viagem descrita. Qual e porquê?



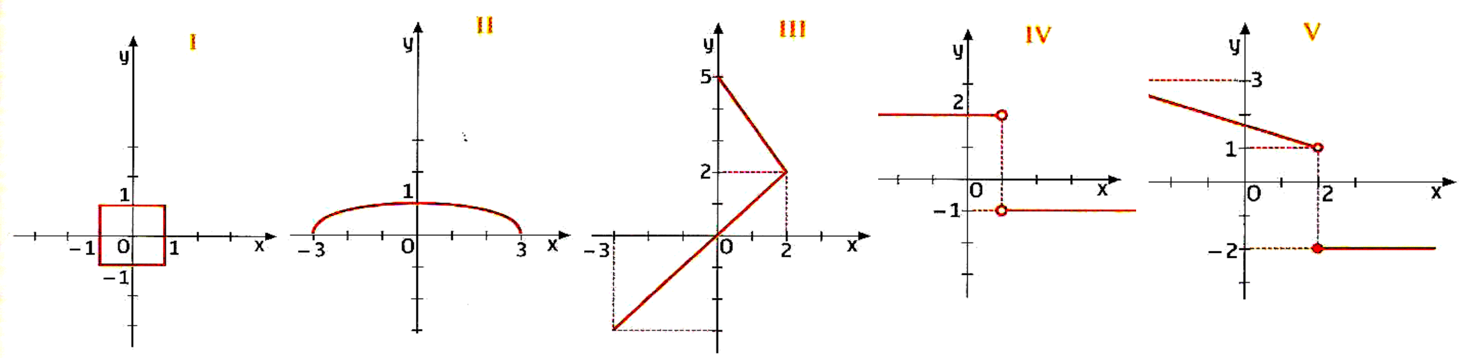
2. Noção de função

- **Função** é uma correspondência entre dois conjuntos **A** e **B**, em que todo o elemento *x* (**objeto**) do conjunto **A** (<u>conjunto de partida</u>) corresponde com **um e um só** elemento *y* (**imagem**) do conjunto **B** (<u>conjunto de chegada</u>).

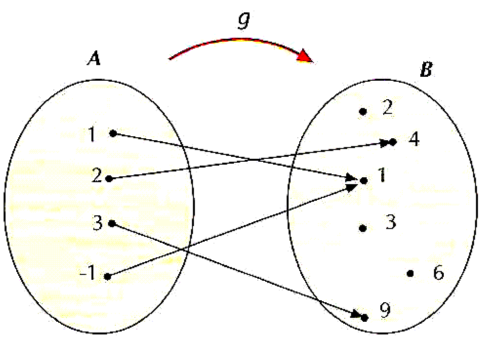
Simbolicamente,
$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

- Ao conjunto dos objetos chamamos **Domínio** da função e representamos por **D**.
- Ao conjunto das imagens chamamos **Contradomínio** da função e representamos por **D'**.

<u>Ex1</u>: Quais dos seguintes gráficos são representações de funções?



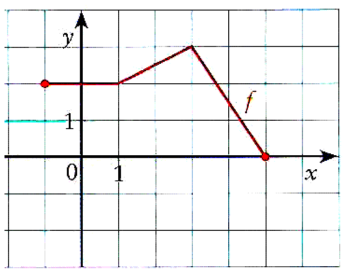
<u>Ex2</u>: Para cada uma das funções, <u>completa</u>:



$D_g =$

$D'_g =$

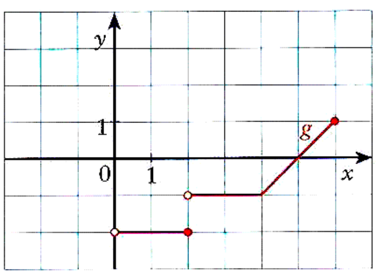
$g(1) = \ldots\ldots \quad g(2) = \ldots\ldots \quad g(\ldots\ldots) = 9$



$D_f =$

$D'_f =$

$f(3) = \ldots\ldots \quad f(0) = \ldots\ldots \quad f(\ldots\ldots) = 0$



$D_g =$

$D'_g =$

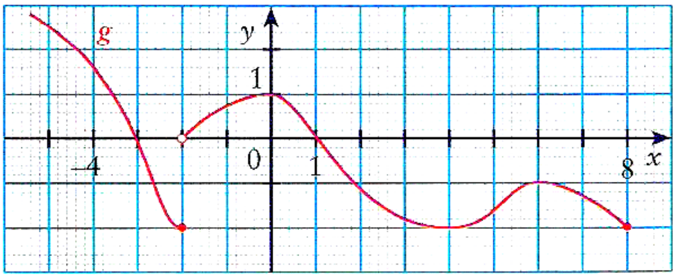
$g(1) = \ldots\ldots \quad g(0) = \ldots\ldots \quad g(\ldots\ldots) = 1$

3. Zeros de uma função. Sinal de uma função.

- **Zero** de uma função é todo o objeto que tem imagem nula.
  Ou seja, ***a*** é um zero de uma função se e só se *f*(***a***)=0.

<u>Ex3.1</u>: Completa:

$D_g =$ $\qquad\qquad$ $D'_g =$ $\qquad\qquad$ <u>Quadro de sinal</u>**:**



Os Zeros da função são:

$f(x) > 0$, para

$f(x) \leq 0$, para

<u>Ex3.2</u>: Considera a função *g* representada graficamente no referencial abaixo. **Determina** o <u>conjunto solução</u> de cada uma das condições seguintes:

3.2.1. $g(x) = 0$

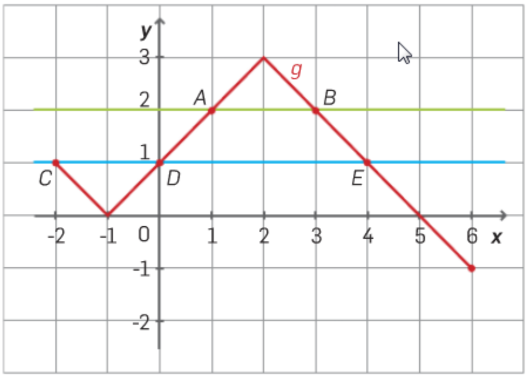
3.2.2. $g(x) = 1$

3.2.3. $g(x) = 2$

3.2.4. $g(x) \leq 0$

3.2.5. $g(x) \geq 1$

3.2.6. $g(x) < 2$



4. Monotonia de uma função

- Diz-se que uma função ***f*** é **crescente** (em sentido lato) num intervalo do domínio se, para todos os números reais **a** e **b** deste intervalo, sempre que se tem $a < b$ se tem $f(a) \leq f(b)$.
- Diz-se que uma função ***f*** é **decrescente** (em sentido lato) num intervalo do domínio se, para todos os números reais **a** e **b** deste intervalo, sempre que se tem $a < b$ se tem $f(a) \geq f(b)$.
- Uma função ***f*** é **constante** num intervalo do domínio se nesse intervalo todos os objetos tiverem a mesma imagem.

- **Extremos absolutos**:

  - $f(a)$ é **máximo absoluto** de f se, para todo o $x \in D$, $f(a) \geq f(x)$.
    a diz-se um **maximizante** da função.

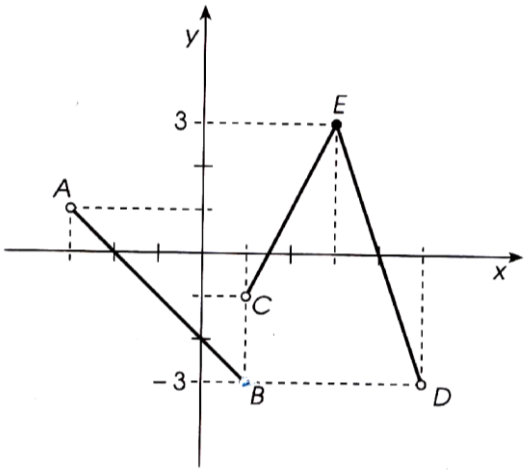
  - $f(b)$ é **mínimo absoluto** de f se, para todo o $x \in D$, $f(b) \leq f(x)$.
    b diz-se um **minimizante** da função.

- **Extremos relativos**:

  - $f(a)$ é **máximo relativo** de f se existir um intervalo aberto $]x_1, x_2[$ (intervalo do domínio da função a que pertence ***a***) , tal que para todo o $x \in]x_1, x_2[$, $f(a) \geq f(x)$.
    a diz-se um **maximizante** da função.

  - $f(b)$ é **mínimo absoluto** de f se existir um intervalo aberto $]x_1, x_2[$ (intervalo do domínio da função a que pertence ***b***) , tal que para todo o $x \in]x_1, x_2[$, $f(b) \leq f(x)$.
    b diz-se um **minimizante** da função.

<u>**Ex4**</u>**:** Na figura está representada uma função f .



4.1. Indica **domínio** e o **contradomínio** de f .

4.2. Indica os **extremos da função** (máximos e mínimos absolutos e relativos).

4.3. Indica um **intervalo** onde f seja **negativa e crescente**.

4.4. Faz o **quadro de variação** da função.

5. Monotonia e extremos de uma função. Quadro de variação.

- Diz-se que uma função ***f*** é **estritamente crescente** num intervalo **I** do domínio se, para todos os números reais **a** e **b** deste intervalo **I**, sempre que se tem $a < b$ *se tem* $f(a) < f(b)$.

  Nota: ***f*** diz-se **crescente** em <u>sentido lato</u> se, $\forall a, b \in I, \quad a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.

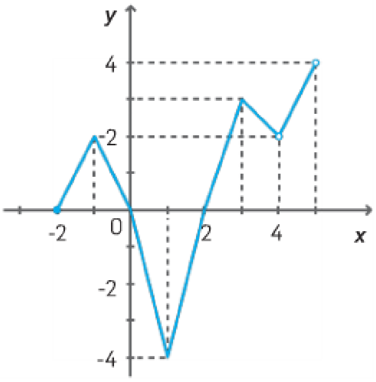
- Diz-se que uma função ***f*** é **estritamente decrescente** num intervalo **I** do domínio se, para todos os números reais **a** e **b** deste intervalo **I**, sempre que se tem $a < b$ se tem $f(a) > f(b)$.

  Nota: ***f*** diz-se **decrescente** em <u>sentido lato</u> se, $\forall a, b \in I, \quad a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.

- Uma função ***f*** é **constante** num intervalo **I** do domínio se, nesse intervalo, todos os objectos tiverem a mesma imagem.

  Nota: Uma função diz-se **monótona** se é crescente ou decrescente em todo o seu domínio.

<u>Ex.5.1</u> Estuda a **monotonia** da função abaixo representada e indica os seus **intervalos de monotonia**.



$D_f =$

$D'f =$

f é estritamente crescente em

f é estritamente decrescente em

- **Extremos absolutos**:

  - ***f***$(\boldsymbol{a})$ é **máximo absoluto** de ***f*** se, para todo o $x \in D$, $f(a) \geq f(x)$.
    - ***a*** diz-se um **maximizante** da função.

  - ***f***$(\boldsymbol{b})$ é **mínimo absoluto** de ***f*** se, para todo o $x \in D$, $f(b) \leq f(x)$.
    - ***b*** diz-se um **minimizante** da função.

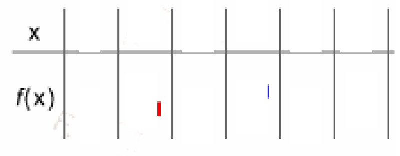
  Nota: O **máximo** (<u>mínimo</u>) **absoluto** de uma função, caso exista, é o **maior** (<u>menor</u>) valor do seu contradomínio.

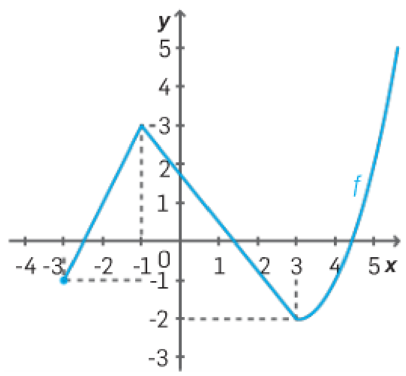
- **Extremos relativos**:

  - ***f***$(\boldsymbol{a})$ é **máximo relativo** de ***f*** se existir um intervalo aberto $]x_1, x_2[$ (intervalo do domínio da função centrado em ***a***) , tal que para todo o $x \in]x_1, x_2[$, $f(a) \geq f(x)$.
    - ***a*** diz-se um **maximizante** da função.

- o $f(b)$ é **minímo absoluto** de ***f*** se existir um intervalo aberto $]x_1, x_2[$ (intervalo do domínio da função centrado em ***a***) , tal que para todo o $x \in]x_1, x_2[$, $f(b) \leq f(x)$.
  - ❖ ***b*** diz-se um **minimizante** da função.

<u>Ex.5.2:</u> Estudo da **monotonia** e dos **extremos relativos e absolutos** de uma função através do <u>Quadro de Variação</u>.



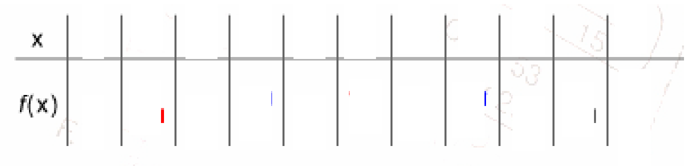


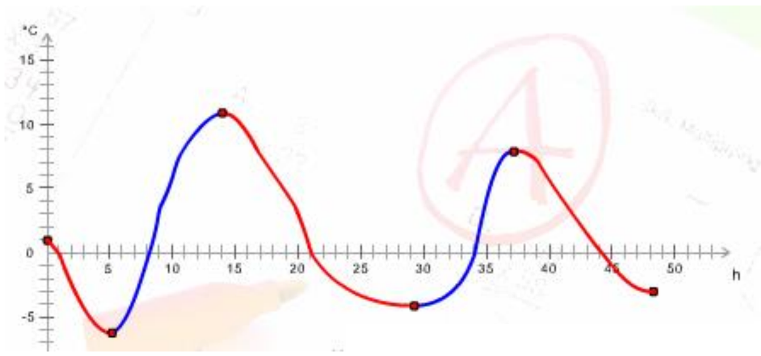
- f é estritamente **crescente** em
- f é estritamente **decrescente** em

- **Extremos absolutos** (máximo e mínimo):

- **Extremos relativos** (máximos e mínimos):

<u>Ex.5.3</u>: Estudo da **monotonia** e dos **extremos relativos e absolutos** de uma função através do <u>Quadro de Variação</u>.





- f é estritamente **crescente** em
- f é estritamente **decrescente** em

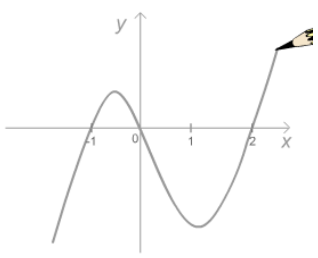
- **Extremos absolutos** (máximo e mínimo):

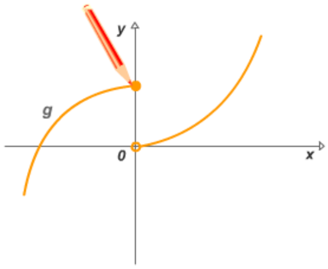
- **Extremos relativos** (máximos e mínimos):

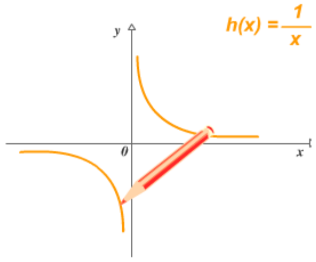
6. Continuidade de uma função

- Uma função diz-se **contínua** se não tiver pontos de descontinuidade [ou seja, se for possível, em todo o seu domínio, percorrer o gráfico da função com um lápis sem o levantar].

Ex.6: Quais das funções seguintes são contínuas?







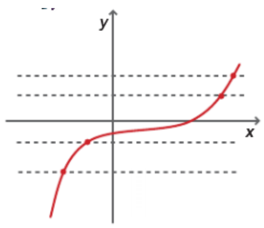
7. Injetividade

- Uma função diz-se **injetiva** se para quaisquer objetos diferentes corresponderem imagens diferentes.

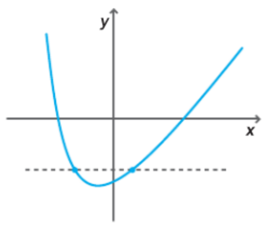
Simbolicamente, $\forall\, a, b \in D_f,\ se\ a \neq b \quad então \quad f(a) \neq f(b)$

Nota1: Se existirem dois objetos diferentes com a mesma imagem a função é **não injetiva**. Por exemplo, uma função constante [ou que tenha um intervalo em que seja constante] é sempre não injetiva porque há uma infinidade de objetos com a mesma imagem.

Nota2: Graficamente, uma função é injetiva se ao se traçar qualquer reta horizontal esta intersectar o gráfico da função apenas num ponto.



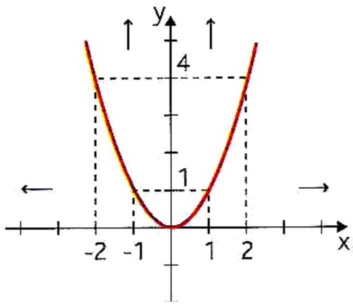
A função que aqui se representa graficamente é injectiva.



A função que aqui se representa graficamente é não injectiva.

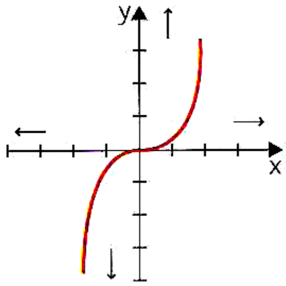
Nota3: Uma função diz-se **sobrejetiva** se o contradomínio coincidir com o conjunto de chegada.

8. Paridade: função par e função ímpar. Simetrias no gráfico



- Uma função diz-se **par** se, para todo o $x \in D$, $f(x) = f(-x)$.

  [Graficamente, uma função é **par** se o seu gráfico for <u>simétrico em relação ao eixo dos *yy*</u>].

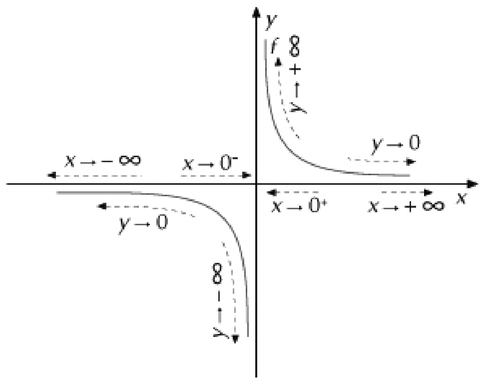


- Uma função diz-se **ímpar** se, para todo o $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

  [Graficamente, uma função é **ímpar** se o seu gráfico for <u>simétrico em relação à origem</u>].

Nota: Uma função pode não ser par nem ímpar.

9. Limites no infinito e limites infinitos



- Examinando a representação gráfica de uma função podemos concluir como se comporta uma função para valores muito grandes $(x \to +\infty)$, para valores muito pequenos $(x \to -\infty)$ ou para valores próximos de um qualquer objecto *x* $\left(\text{por exemplo}, x \to 0^- \text{ ou } x \to 0^+\right)$.

$$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad y \to 0 \quad ou \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad y \to \qquad ou \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) =$$

$$x \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad y \to \qquad ou \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) =$$

$$x \to 0^- \quad \Rightarrow \quad y \to \qquad ou \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) =$$