MATEMÁTICA 10º A – T_2

Ficha de Trabalho 11 – Equação Vectorial e reduzida de uma recta

➢ Equação Vectorial da Recta

Dado um ponto ***A*** e um vector não nulo $\vec{u}$, podemos definir uma recta *r,* que passa pelo ponto ***A*** e tem a <u>direcção</u> do vector $\vec{u}$, através da **equação vectorial da recta** *r,* dada por:

$\boxed{P = A + k\,\vec{u}, \quad k \in R}$, onde P é um ponto qualquer dessa recta.

Diz-se que $\vec{u}$ é um **vector director** de *r*.

Na figura pode observar a recta r e o vector $\vec{u}$.

Repare que:

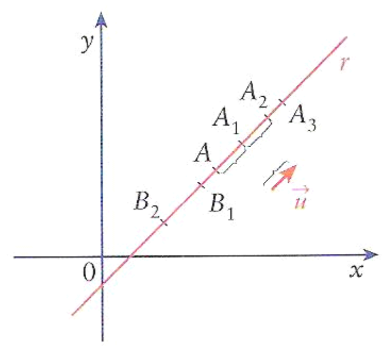
$A_1 = A + \vec{u}$

$A_2 = A + 2\vec{u}$

$A_3 = A + 2{,}5\vec{u}$

$B_1 = A - 0{,}5\vec{u}$

$B_2 = A - 2\vec{u}$



De um modo geral, sendo P um ponto qualquer da recta, tem-se que:

$$P = A + k\vec{u} \ , \ k \in \mathbb{R}$$

Assim,

- No <u>plano</u>, uma **equação vectorial** da recta *r* que passa no ponto $A(x_A, y_A)$ e tem a direcção do vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é dada por: $\boxed{(x, y) = (x_A, y_A) + k(u_1, u_2), \quad k \in R}$

- No <u>espaço</u>, uma **equação vectorial** da recta *r* que passa no ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e tem a direcção do vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ é dada por: $\boxed{(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + k(u_1, u_2, u_3), \quad k \in R}$

Exemplos de Aplicação:

Ex1:

Escreve a **equação vectorial** da recta que passa pelo ponto $(-6, 1)$ e tem a direcção de $\vec{v}=(1, -2)$.

Ex2:

Escreve a **equação vectorial** da recta que passa pelos pontos $A(-1, 0, 2)$ e $B(3, -2, 1)$**.**

Ex3:

Escreve a **equação vectorial** da recta que passa pelo ponto $(1, -2)$ e que é paralela à recta de equação $(x, y)=(0, 1)+k(-2, 4), k \in \Re$**.**

Ex4:

Averigua se o ponto $(-6, 11)$ pertence à recta de equação $(x, y)=(0, 1)+k(-2, 4), k \in \Re$**.**

Ex5:

Considera os pontos $A=(-2, 3, 1)$, $B=(1, 5, -3)$ e $C=(-2, 2, 0)$**.** Escreve a **equação vectorial** da recta que passa pelo contém o ponto C e que é paralela à recta AB.

Ex6:

Verifica se as rectas seguintes são paralelas:

s: $(x, y, z)=(3, 0, -4)+k(3, 0, -4), k \in \Re$ e *r:* $(x, y, z)=(0, 1, 0)+k(6, 0, -8), k \in \Re$

- **Equação reduzida da recta no plano**

Chama-se equação reduzida de uma recta, não vertical, à equação do tipo $\boxed{y = mx + b}$, em que ***m*** é o <u>declive</u> da recta e ***b*** a <u>ordenada na origem</u>.

Nota1: Só existe equação reduzida da recta no plano.

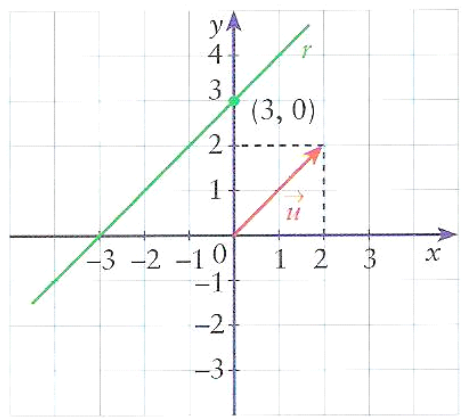
Nota2: Nas rectas verticais, não é possível determinar o declive, por isso não existe equação reduzida.

Nota3: O declive ***m*** de uma recta que contém os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é dado pela fórmula: $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Se o vector director da recta é $\vec{u} = (u_1, u_2)$ então $m = \dfrac{u_2}{u_1}$.

Exemplo de como se passa de uma equação vectorial para uma equação reduzida:

Uma equação vectorial da recta r é:

$(x\ ,\ y) = (3\ ,\ 0) + k\ (2\ ,\ 2)\ ,\ k \in \mathbb{R}$.



A partir desta é possível obter outra equação da recta.

Com efeito, tem-se:

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 0 + 2k\ ,\ \ k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Forma-se um sistema de equações.

Resolvendo as duas equações em ordem a k, vem:

$$\begin{cases} k = \dfrac{x-3}{2} \\ k = \dfrac{y}{2}\ ,\quad k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Resolvem-se as equações em ordem a k.

Daqui resulta que:

Equação cartesiana

$\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{2} \Leftrightarrow$

Repare que apenas escrevemos $k = k$

$\Leftrightarrow x - 3 = y \Leftrightarrow$

Resolve-se a equação em ordem a y.

$\Leftrightarrow y = x - 3$

À equação $y = x - 3$ chama-se **equação reduzida da recta.**

Exemplos de Aplicação:

Ex1:

Escreve a **equação reduzida** da recta $(x, y) = (1, 2) + k(3, 1), k \in \Re$

Ex2:

Escreve a **equação reduzida** da recta que passa $A(-1, 0)$ e direcção de $\vec{v} = (1, -2)$.

Ex3:

Escreve a **equação reduzida** da recta AB, onde $A = (1, 2)$ e $B = (5, 6)$.

Ex4:

Averigua se o ponto $(3, 5)$ pertence à recta de equação $y = 2x - 1$

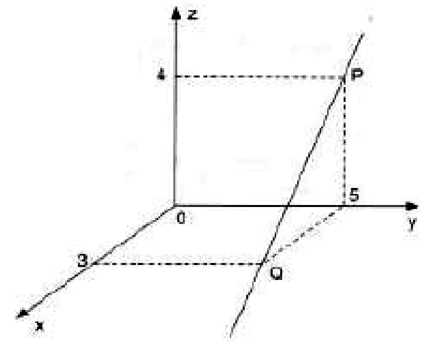
Ex5:

Escreve a **equação vectorial** da recta definida pela equação $y = 2x - 1$.

Ex6:

Escreve a **equação reduzida** da recta que passa pelo ponto $A(-1, 2)$ e que é paralela à recta de equação $(x, y) = (1, 2) + k(-2, 2), k \in \Re$.

1ª Parte – Escolha Múltipla

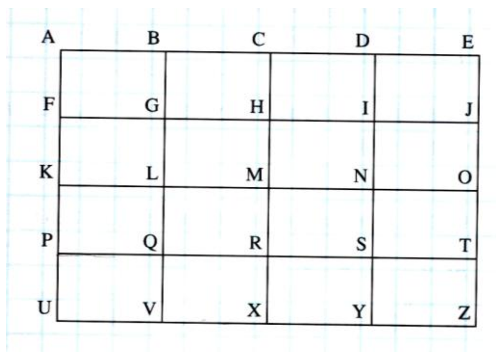


1. No Referencial da figura, o ponto P pertence ao plano *yOz* e o ponto Q pertence ao plano xOy. Qual das condições seguintes define a recta que passa pela origem e é paralela a PQ?

(A) $(x, y, z) = k(3, 0, -4), k \in \Re$ **(C)** $x = 3 \wedge y = 5 \wedge z = 0$

(B) $(x, y, z) = (3, 5, 0) + k(3, 0, -4), k \in \Re$ **(D)** $x = 3 \wedge y = 5$

2. A figura representa um rectângulo dividido em dezasseis rectângulos geometricamente iguais.



Qual das seguintes afirmações é **falsa**?

(A) $2\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{PR}$

(B) $U + \frac{1}{2}\overrightarrow{RJ} = M$

(C) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{QG} = \overrightarrow{OC}$

(D) $\overrightarrow{LO} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{LY}$

3. Considere os vectores $\vec{u} = (0,1)$ e $\vec{v} = (0, -4)$. Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**:

(A) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares e $\|\vec{v}\| = -4\|\vec{u}\|$ **(C)** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares e $\|\vec{v}\| = -4\|\vec{u}\|$

(B) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares e $\vec{v} = -4\vec{u}$ **(D)** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares e $\vec{v} = -4\vec{u}$

4. Considere os vector $\vec{u} = (1, m)$ e $\vec{v} = (-2, 3)$. Para que os vectores sejam colineares, o valor de **m** terá que ser igual a:

(A) 2 **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $-\frac{3}{2}$ **(D)** Nenhuma das respostas anteriores

5. Considere os pontos A$(1, -1)$ e B$(0, 3)$. A equação da recta AB fica definida por:

(A) $(x, y) = (1, -1) + k(-1, -4), k \in \Re$ **(B)** $(x, y) = (0, 3) + k(-1, 4), k \in \Re$

(C) $(x, y) = k(1, 2), k \in \Re$ **(D)** $y = 4x + 3$

6. A recta ***r*** que passa pelo ponto A$(-1, 0)$ e tem a direcção do vector $\vec{u} = (-1, 2)$ tem por equação:

(A) $y = -2x - 2$ **(B)** $y = -2x + 2$ **(C)** $y = -2x$ **(D)** $y = -\frac{1}{2}x + 2$

7. O ponto de intersecção das rectas $r : (x, y) = (0, -2) + k(-1, 3), k \in \Re$ e $s : y = x + 2$, é:

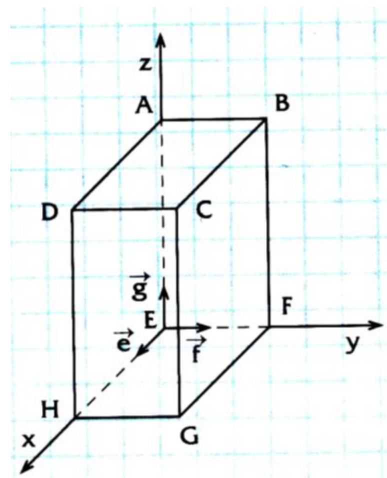
(A) $(0, -2)$ **(B)** $(-1, 3)$ **(C)** $(-1, 2)$ **(D)** $(1, 2)$

8. Considere, num referencial ortonormado do plano, a recta ***r*** de equação $y = 2x - 1$ e o ponto A$(1,5)$. Qual das seguintes condições define a recta paralela a ***r*** e que contém o ponto A?

(A) $y = 2x + 5$ **(B)** $y = \frac{1}{2}x + 5$ **(C)** $y = 2x + 3$ **(D)** $y = \frac{1}{2}x + 3$

2ª Parte

1. No referencial o.n. (O, $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$) está representado um paralelepípedo rectângulo em que $\overline{AD} = 4$; $\overline{DC} = 3$ e $\overline{GC} = 5$.



1.1. Usando as letras assinaladas na figura, **completa**:

1.1.1. H + ... = B

1.1.2. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CG}$ = ...

1.1.3. $\overrightarrow{DG} - \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{FB}$= ....

1.2. **Determina** a <u>norma</u> de $\overrightarrow{BH}$.

1.3. **Escreve** a equação vectorial da recta HG.

1.4. **Escreve** a equação vectorial da recta que <u>passa</u> pelo ponto D e é <u>paralela</u> a BH.

2. Considera o vector $\vec{v} = (1, -2)$ e a recta *r*: $(x, y) = (0, 1) + k(-2, 4),\ k \in \Re$

2.1. **Averigua** se o ponto $(-6, 11)$ pertence à recta *r*.

2.2. **Prova** que o vector $\vec{v}$ é um vector director da recta *r*.

2.3. **Calcula** as coordenadas de um vector $\vec{w}$ <u>colinear</u> com o vector $\vec{v}$ e de <u>norma</u> $\sqrt{20}$.

3. Considera a recta de equação $(x\,;y) = (1;-3) + k(-3;6),\ k \in \Re$ e o ponto $P(-1;2)$.

3.1. Determina a **equação reduzida** da recta.

3.2. **Verifica** se o ponto P **pertence** à recta dada.

3.3. Uma recta cujo vector director seja $\vec{u} = (2;-4)$ é **paralela** à recta dada? **Justifica**.

3.4. Indica as **coordenadas de um ponto** Q, tal que o vector $\overrightarrow{PQ}$ seja colinear com o vector $\vec{u} = (0;1)$ e de forma a que $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = 2$.