



MATEMÁTICA 11º PG

Ficha de Trabalho 10 – Funções Racionais

1. O que é uma função racional?

- Uma **função racional** é uma função definida por: $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$, onde $n(x)$ e $d(x) \neq 0$ são polinómios.

Exemplos:

$$f(x) = \frac{x-2}{x}, g(x) = \frac{x^2}{x-1}, h(x) = \frac{x^3-x}{x^2-4}, i(x) = -\frac{1}{x^3+1}, l(x) = \frac{1}{x} \text{ são funções racionais.}$$

2. Como se determina o domínio de uma função racional?

- O **domínio** de uma função racional é dado pelo conjunto dos números reais que não anulam o denominador. Assim, para $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$, temos que $D_f = \{x \in \mathbb{R} : d(x) \neq 0\}$.

Exemplos:

$$f(x) = \frac{x-2}{x}, D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

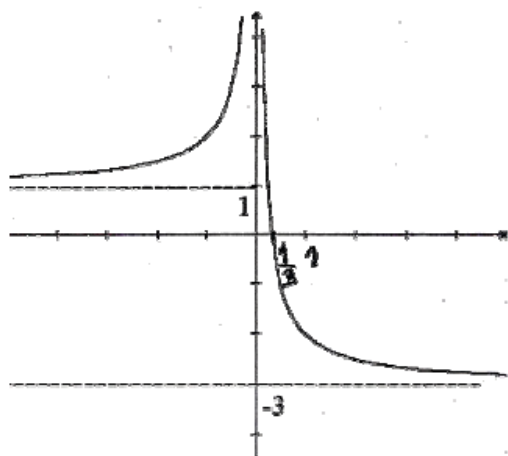
$$g(x) = \frac{x^2}{x-1}, D_g = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$h(x) = \frac{x^3-x}{x^2-4}, D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2-4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$i(x) = -\frac{1}{x^3+1}, D_i = \{x \in \mathbb{R} : x^3+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

3. Quais as características de um gráfico de uma função racional "tipo"?

Exemplo:



Domínio: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Contra-domínio: $D' =]-3, +\infty[$

Zeros: $x = \frac{1}{3}$

Assimptotas: O gráfico tem uma assimptota vertical, a recta $x = 0$, e duas assimptotas horizontais, a recta $y = -3$ e a recta $y = 1$

Limites: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$;

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

4. O que é uma assíntota de um gráfico?

- **Assíntota vertical:** A recta de equação $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico se e só se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty).$$

- **Assíntota horizontal:** A recta de equação $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico se e só se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

5. Como se determinam as assíntotas de um gráfico?

- **Assíntota vertical:**

Seja $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$ uma função racional. Se a é um número tal que $d(a) = 0$ e $n(a) \neq 0$, então a recta

$x = a$ é assíntota vertical do gráfico.

Exemplo:

$f(x) = \frac{x-2}{x}$, $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ora temos que 0 é zero do denominador e não é zero do denominador, logo a recta $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico.

- **Assíntota horizontal:**

Seja $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$ uma função racional.

- Se $n < m$, a recta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f .
- Se $n = m$, a recta de equação $y = \frac{a_n}{b_m}$ é assíntota horizontal do gráfico de f .
- Se $n > m$, o gráfico da função f não tem assíntotas horizontais.

Nota: Numa função racional existem, no máximo, duas assíntotas horizontais.

Exemplos:

- $f(x) = \frac{x-2}{2x}$, como o grau do numerador é igual ao grau do denominador então a recta $y = \frac{1}{2}$ é assíntota horizontal de f .
- $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$, como o grau do numerador é maior do que o grau do denominador então a recta $y = 0$ é assíntota horizontal de f .
- $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$, como o grau do numerador é maior do que o grau do denominador então f não tem assíntotas horizontais.