MATEMÁTICA 11º PG

Ficha de Trabalho 2

Generalização da noção de ângulo e arco. Razões trigonométricas generalizadas

Actividade inicial 1 — O grau

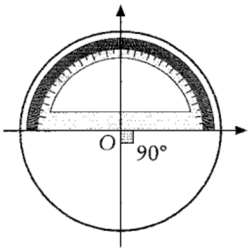
Observações

1. O grau como unidade de medida utiliza-se desde o tempo dos Babilónios, para quem o ano tinha 360 dias.
2. Da mesma forma que mediam os ângulos, mediam o tempo.
   - 1 h = 60 min
   - 1 min = 60 s
3. O **grau** é a unidade do sistema de unidades designado por **sistema sexagesimal**.

Imagine uma circunferência dividida em 360 partes iguais.

Um grau seria a amplitude de um ângulo ao centro correspondente a cada uma dessas partes.

Como uma circunferência corresponde a quatro ângulos rectos, pode dizer-se que:



Um grau é a nonagésima parte de um ângulo recto.

1 grau corresponde a 60′ (60 minutos) ; $1° = 60'$

1 minuto corresponde a 60″ (60 segundos) ; $1' = 60''$

A medida de um ângulo no sistema sexagesimal pode ser expressa numa única unidade, por exemplo, $\alpha = (21{,}12)°$, ou em várias unidades:

$$\alpha = (21{,}12)° = 21°\ 7'\ 12''$$

Escreva $(23{,}52)°$ em graus, minutos e segundos.

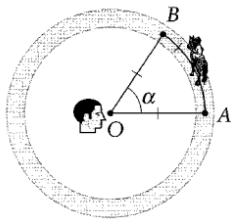
Teoria 1 — O radiano

Objectivos

1. Definir radiano.
2. Converter graus em radianos e radianos em graus.

Observe a figura ao lado.

O cavalo percorreu o arco AB que é igual à distância $\overline{OA}$ (raio do círculo). Qual é a amplitude do ângulo α ?



Tem-se:

comprimento do arco		amplitude do ângulo
$2\pi r$	———	$360°$
r	———	α

$$\alpha = \frac{360° \times \cancel{r}}{2 \times \pi \times \cancel{r}}$$

Usando a calculadora gráfica, vem que:

$\alpha \approx (57{,}3)°$ é um valor aproximado da amplitude do ângulo α .

Note que $\alpha = \dfrac{180°}{\pi}$ é o valor exacto.

$$\alpha = 1 \ \text{radiano}$$

Um radiano (rad) é a amplitude de um ângulo que define em qualquer circunferência, com centro no seu vértice, um arco de comprimento igual ao raio.

Observação

O **radiano** é a unidade de medida do sistema de unidades designado por **sistema circular**.

Como o perímetro do círculo de raio r é $2\pi r$, podemos dizer que o raio "cabe" 2π vezes na circunferência, isto é, um radiano "cabe" 2π vezes num arco de $360°$. Então,

$$2\pi \ \text{rad} = 360°$$

Exemplo 1 — Graus e radianos

Observação

A amplitude de um ângulo é expressa em graus ou em radianos. Se a unidade não estiver explícita entende-se que seja o radiano.

Por exemplo, dizer que a amplitude de um ângulo é $\frac{\pi}{2}$ significa dizer $\frac{\pi}{2}$ rad.

Escreva:

1.1 $20°$ em radianos;

1.2 $\frac{\pi}{5}$ rad em graus.

Resolução

1.1
$$\begin{array}{rcl} 180° & \text{———} & \pi \text{ rad} \\ 20° & \text{———} & x \end{array}$$

$$x = \frac{20° \times \pi}{180°} \text{ rad} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$$

Repare que: $\frac{20}{180} = \frac{1}{9}$

Então, $20° = \frac{\pi}{9}$ rad .

1.2
$$\begin{array}{rcl} 180° & \text{———} & \pi \text{ rad} \\ x & \text{———} & \frac{\pi}{5} \text{ rad} \end{array}$$

$$x = \frac{180° \times \frac{\pi}{5} \text{ rad}}{\pi \text{ rad}} \Leftrightarrow x = \frac{180°}{5} \Leftrightarrow x = 36°$$

Então, $\frac{\pi}{5}$ rad $= 36°$.

Verifica 1

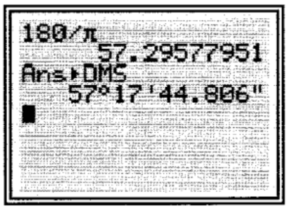
1.1 Copie e complete a tabela seguinte:

Graus	360		90		45		1	$\frac{180}{\pi}$
Radianos		π		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{180}$	

Verifique a resposta usando a calculadora gráfica.

1.2 Use a calculadora para concluir que:

1 rad ≈ 57 ° 17’ 45”



1.3 Sabendo que $180°$ corresponde a π radianos, use uma regra de três simples para:

a) escrever em radianos:

a_1) $62°$;

a_2) $300°$;

a_3) $15° \, 30'$.

b) escrever em graus:

b_1) $\frac{5\pi}{4}$ rad ;

b_2) $\frac{11\pi}{20}$ rad ;

b_3) 3,14 rad (apresente o resultado com duas casas decimais.).

Actividade inicial 2 Rotações

Observe as figuras ao lado.

Na figura 1, diz-se que o ponto A' é transformado do ponto A por uma rotação de centro O e ângulo $+90°$.

Na figura 2, diz-se que o ponto A' é transformado do ponto A por uma rotação de centro O e ângulo $-90°$.

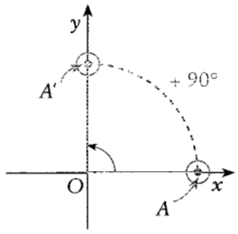


Figura 1

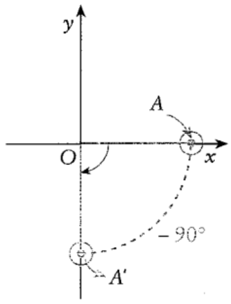


Figura 2

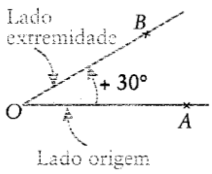
A cada ângulo pode associar-se uma amplitude e um sentido. Convencionou-se que o sentido do movimento dos ponteiros do relógio corresponde ao sentido negativo e o sentido contrário ao dos ponteiros do relógio corresponde ao sentido positivo.

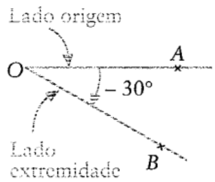
Desenhe o ponto A' transformado do ponto A por uma rotação de centro O e:

2.1 ângulo $+180°$; 2.2 ângulo $-180°$.

Teoria 2 Representação de um ângulo orientado

Objectivo: Representar um ângulo orientado.



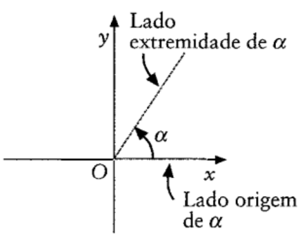


A um ângulo ao qual se atribui um sentido chama-se ângulo orientado.

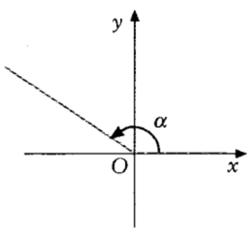
Para representar um ângulo orientado utiliza-se um sistema de coordenadas cartesianas.

Os eixos coordenados dividem o plano em quatro regiões e a cada uma delas chama-se quadrante. O lado origem do ângulo coincide com a parte positiva do eixo das abcissas. Os ângulos dizem-se do 1.°, 2.°, 3.° ou 4.° quadrante, de acordo com o quadrante a que pertence o lado extremidade do ângulo.

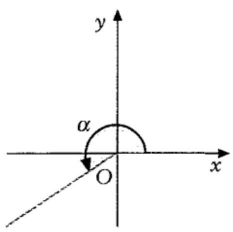
Quando o lado extremidade se sobrepõe a um dos eixos o ângulo não pertence a nenhum quadrante. Por exemplo, o ângulo de amplitude 90° não é nem do 1.° nem do 2.° quadrante.



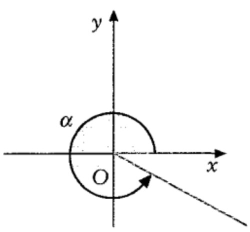
$\alpha \in 1.^{\circ}$ Q



$\alpha \in 2.^{\circ}$ Q



$\alpha \in 3.^{\circ}$ Q



$\alpha \in 4.^{\circ}$ Q

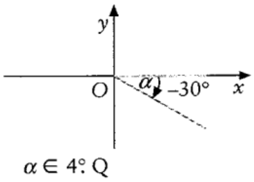
Exemplo 2 Representar um ângulo

Represente, num referencial, o ângulo α e indique o quadrante a que pertence.

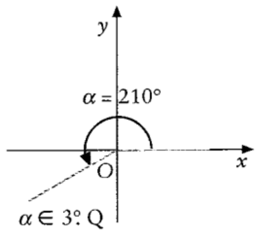
2.1 $\alpha = -30°$; 2.2 $\alpha = 210°$; 2.3 $\alpha = -300°$.

Resolução

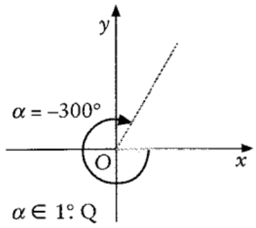
2.1



2.2

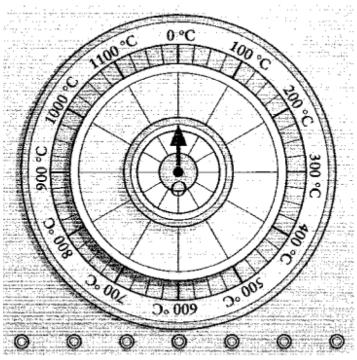


2.3



Verifica 2

2.1 Numa máquina industrial existe um botão com a forma de um círculo com centro em O , que roda nos dois sentidos para seleccionar a temperatura desejada para um determinado trabalho, como se ilustra na figura seguinte.



Qual é a temperatura indicada, em graus Celsius, quando se roda o botão:

a) $-30°$? b) $30°$?

c) $-60°$? d) $120°$?

e) $180°$? f) $-180°$?

g) $-360°$? h) $360°$?

2.2 Represente, num referencial, cada um dos seguintes ângulos e diga a que quadrante pertence:

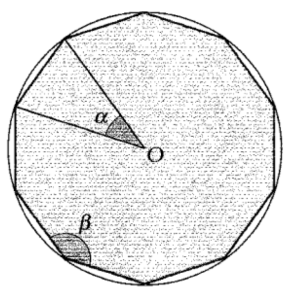
a) $-25°$;

b) $315°$;

c) $-280°$;

d) $-\frac{3}{5}\pi$ rad .

2.3 Na figura seguinte está representada uma circunferência de centro O e nela está inscrito um decágono regular.

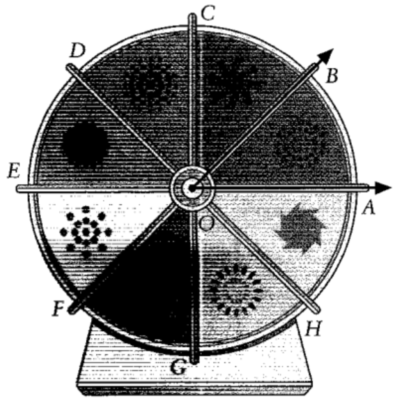


a) Exprima α e β em graus e em radianos.

b) Represente α e β num referencial e diga a que quadrante pertencem.

Actividade inicial 3 Rodar e rodar...

Na figura está representado um círculo de centro O dividido em oito partes iguais.



3.1 Qual é a amplitude do ângulo AOB ?

3.2 O João rodou o segmento de recta $[OB]$ $270°$. B' é a nova posição de B .
Qual é a amplitude do ângulo AOB' ?

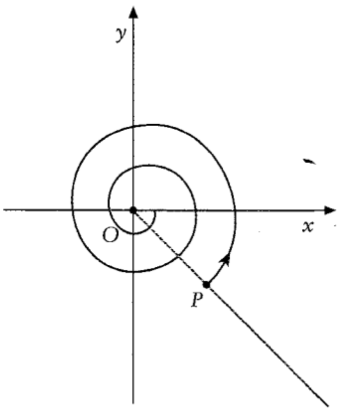
3.3 O João rodou o segmento de recta $[OB]$ $360°$. B'' é a nova posição do ponto B .
Qual é a amplitude do ângulo AOB'' ?

3.4 O João rodou o segmento de recta $[OB]$ $720°$. B''' é a nova posição do ponto B .
Qual é a amplitude do ângulo AOB''' ?

Teoria 3 Generalização da noção de ângulo

Objectivo

Escrever a amplitude principal de um ângulo com qualquer amplitude.



A Joana rodou a tampa de um medicamento dando várias voltas. Observou-se que o ponto P rodou $360° + 360° + 45°$.

Como representar num referencial o ângulo que o ponto P rodou?

Os ângulos $45°$; $45° + 360°$ e $45° + 2 \times 360°$ têm a mesma representação no referencial.

O mesmo acontece, por exemplo, para os ângulos $45°$; $45° - 360°$ e $45° - 2 \times 360°$.

De um modo geral, os ângulos $45° + k \times 360°$, $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma representação num referencial.

Se α é uma das amplitudes de um ângulo orientado, então $\alpha + k \times 360°$, $k \in \mathbb{Z}$, são também amplitudes dos ângulos que têm o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade.

Observação

Se α está expresso em radianos, α e $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ são também amplitudes dos ângulos que têm o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade.

De entre todas as amplitudes de um ângulo orientado, chama-se **amplitude principal** à amplitude α se $-180° < \alpha \leqslant 180°$.

(A amplitude principal corresponde ao trajecto mínimo da semi-recta que descreve o ângulo.)

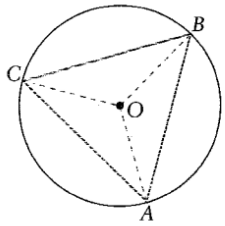
Exemplo 3 — Representações de ângulos

3.1 Indique a amplitude α de um ângulo de modo que $-180° < \alpha \leqslant 180°$ e cujos lados sejam coincidentes com os do ângulo:

a) $1515°$;

b) $-1515°$.

3.2 $[ABC]$ é um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro O.
Escreva uma expressão geral das amplitudes dos ângulos que têm $\dot{O}A$ como lado origem e:

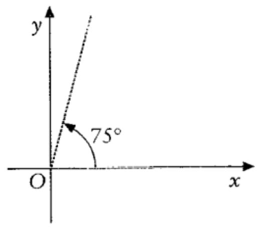


a) $\dot{O}B$ como lado extremidade;

b) $\dot{O}C$ como lado extremidade.

Resolução

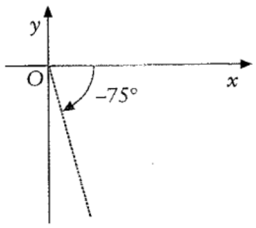
3.1 a) $1515 \,\underline{|360}$
$075 \quad 4$



$1515° = 4 \times 360° + 75°$

Logo, $75°$ é a amplitude pedida.

b) $-1515° = -(4 \times 360° + 75°)$



$-1515° = -4 \times 360° - 75°$

Logo, $-75°$ é a amplitude pedida.

3.2 a) Temos que: $360° : 3 = 120°$, logo uma expressão é: $120° + 360° k$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Temos que: $2 \times 120° = 240°$, logo uma expressão é: $240° + 360° k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Verifica 3

3.1 Determine o quadrante a que pertence cada um dos seguintes ângulos:

a) $1015°$;

b) $2215°$;

c) $-48°$;

d) $-6013°$;

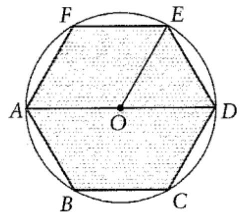
e) $180° - \alpha$ se $\alpha \in 1.°$ quadrante;

f) $3{,}5$ radianos.

3.2 Escreva por ordem crescente as seguintes amplitudes de ângulos:

$$12\pi \text{ rad}; \quad 2132°; \quad \frac{26\pi}{3} \text{ rad}.$$

3.3 Na figura, $[ABCDEF]$ é um hexágono regular inscrito na circunferência de centro O.



Escreva uma expressão geral das amplitudes dos ângulos que têm:

a) lado origem $\dot{O}D$ e lado extremidade $\dot{O}A$;

b) lado origem $\dot{O}E$ e lado extremidade $\dot{O}A$.