

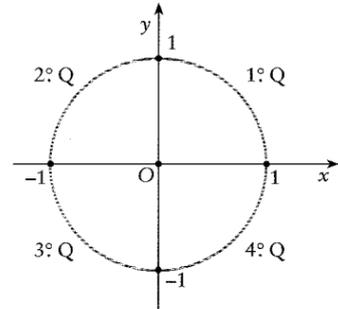
# MATEMÁTICA 11º PG

## Ficha de Trabalho 3 Razões trigonométricas generalizadas

### Actividade inicial 5 O círculo trigonométrico

5.1 Desenhe um círculo centrado na origem de um referencial e raio igual a uma unidade de comprimento.

Acabou de desenhar um **círculo trigonométrico**.

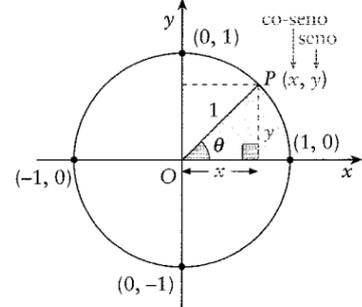


5.2 No círculo trigonométrico assinala o ângulo  $\theta$ , como se mostra na figura.

Ao ponto  $P(x, y)$  do círculo chama-se **ponto associado ao ângulo  $\theta$** .

Justifique que:

$$\sin \theta = y, \quad \cos \theta = x \quad \text{e} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}.$$



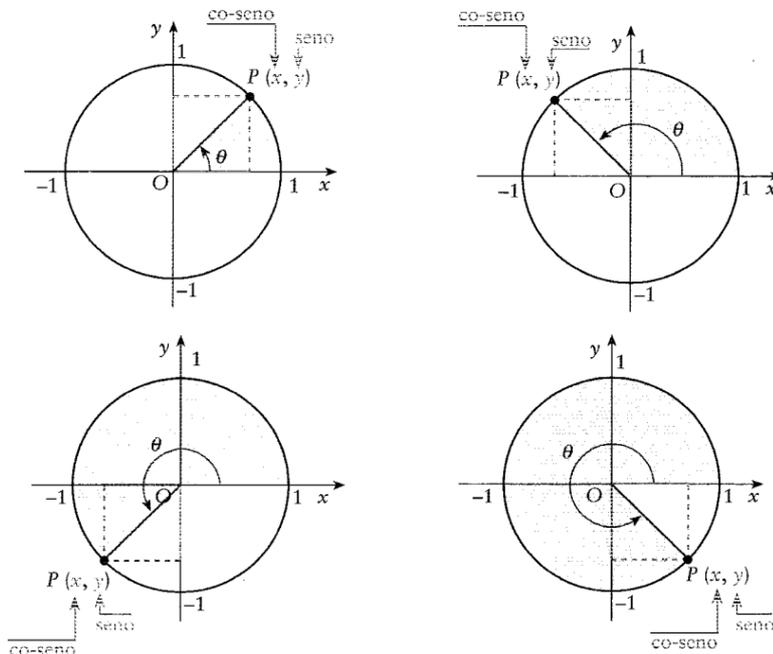
### Teoria 5 Generalização das razões trigonométricas

A um círculo centrado na origem do referencial e de raio uma unidade chama-se **círculo trigonométrico**.

#### Objectivo

Escrever as razões trigonométricas de um ângulo de qualquer amplitude.

Imaginando o ponto  $P$  a percorrer o círculo trigonométrico, o seno do ângulo  $\theta$  será a ordenada desse ponto e o co-seno do ângulo  $\theta$  a abcissa. A tangente de  $\theta$  será o quociente entre o seno de  $\theta$  e o co-seno de  $\theta$ .



**Exemplo**

**5**

**Círculo trigonométrico**

Observe o círculo trigonométrico e a representação dos ângulos expressos em radianos:

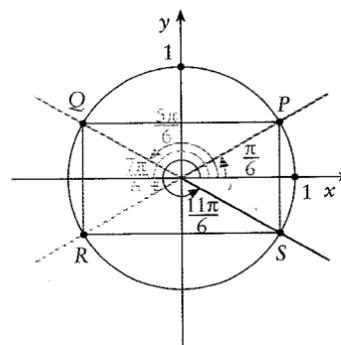
$$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \text{ e } \frac{11\pi}{6}.$$

Escreva as coordenadas dos pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$ .

Resolução

$$P \curvearrowright \left( \cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6} \right); \quad P \curvearrowright \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right);$$

$$Q \curvearrowright \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right); \quad R \curvearrowright \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \text{ e } S \curvearrowright \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

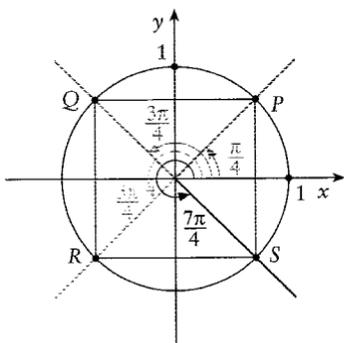


**Verifica**

**5**

5.1 Observe o círculo trigonométrico e a representação dos ângulos expressos em radianos:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \text{ e } \frac{7\pi}{4}.$$



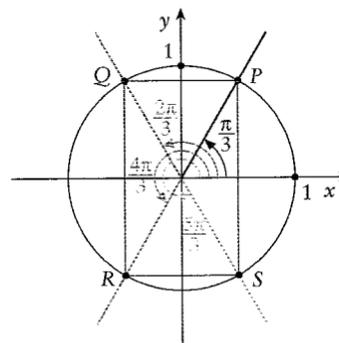
⇒ Escreva as coordenadas de  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$ .

⇒ Copie e complete a tabela seguinte:

$\alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
$45^\circ$	$\frac{\pi}{4} \text{ rad}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$135^\circ$	$\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$		$-1$
$225^\circ$	$\frac{5\pi}{4} \text{ rad}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$315^\circ$	$\frac{7\pi}{4} \text{ rad}$		$-1$

5.2 Observe o círculo trigonométrico e a representação dos ângulos expressos em radianos:

$$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \text{ e } \frac{5\pi}{3}.$$



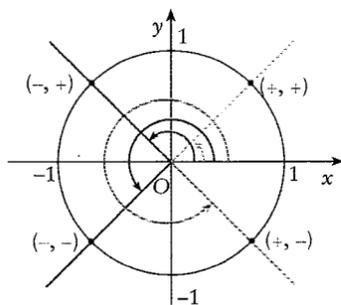
⇒ Escreva as coordenadas de  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$ .

⇒ Copie e complete a tabela seguinte:

$\alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
$60^\circ$	$\frac{\pi}{3} \text{ rad}$	$\frac{1}{2}$	
$120^\circ$	$\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$240^\circ$	$\frac{4\pi}{3} \text{ rad}$	$-\frac{1}{2}$	
$300^\circ$	$\frac{5\pi}{3} \text{ rad}$		$-\sqrt{3}$

**Atividade inicial** **6**

**Sinal das razões trigonométricas**



Observemos a figura ao lado.

O sinal do seno e do co-seno de um ângulo depende do quadrante ao qual pertence o lado extremidade do ângulo.

Considere-se o ponto de intersecção do lado extremidade de um ângulo com o círculo trigonométrico.

=  $\cos \alpha$  é positivo nos quadrantes onde a abcissa desse ponto é positiva (1.º e 4.º quadrantes).

=  $\sin \alpha$  é positivo nos quadrantes onde a ordenada desse ponto é positiva (1.º e 2.º quadrantes).

= O sinal da tangente determina-se atendendo a que  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

Copie e complete a seguinte tabela:

Sinal das razões trigonométricas

Quadrante	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
1.º Q	+	...	...
2.º Q	...	...	-
3.º Q	...	...	+
4.º Q	...	+	...

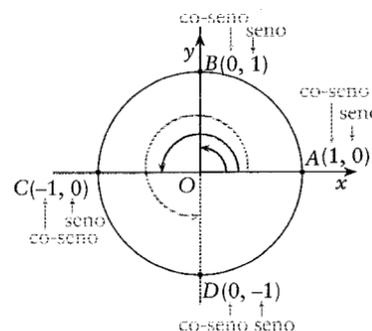
**Tarefa** **6**

**Razões trigonométricas de 0º, 90º, 180º e 270º**

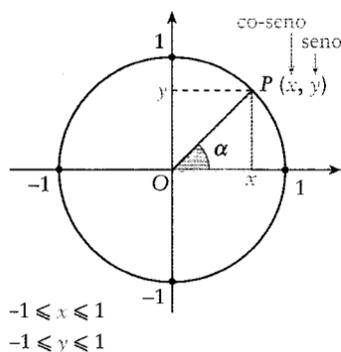
**Objetivos**

1. Indicar o sinal das razões trigonométricas conhecido o ângulo.
2. Indicar as razões trigonométricas das ângulos de amplitudes  $0, \frac{\pi}{2}, \pi$  e  $\frac{3\pi}{2}$

No círculo trigonométrico assinalaram-se os pontos A, B, C e D, pertencentes aos eixos coordenados, e as respectivas coordenadas.



Como a abcissa do ponto associado ao ângulo corresponde ao co-seno do ângulo e a ordenada ao seno do ângulo, é imediato concluir que:



Ângulo	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	Ângulo
0º	0	1	0	0 rad
90º	1	0	Não está definida	$\frac{\pi}{2}$ rad
180º	0	-1	0	$\pi$ rad
270º	-1	0	Não está definida	$\frac{3\pi}{2}$ rad

Inferre-se também da leitura da abcissa e da ordenada do ponto P associado ao ângulo  $\alpha$ , no círculo trigonométrico, que sendo  $\alpha$  um ângulo qualquer temos:

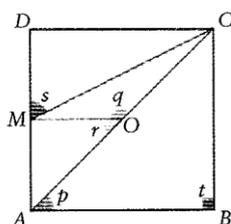
$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

e que a tangente de um ângulo  $\alpha$  pode ser um número real qualquer.

**Exemplo**

**6**

**Simplificar uma expressão trigonométrica**



6.1 Calcule o valor numérico da seguinte expressão:

$$2 \sin(\pi) - 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Verifique a resposta usando a calculadora gráfica.

6.2 Na figura ao lado  $[ABCD]$  é um quadrado de centro  $O$  e aresta  $a$ .  $M$  é o ponto médio de  $[AD]$ .

Atendendo às condições da figura calcule:

$$\sin(p) + \cos(r) + \sin(t) + 2 \cos(q) + \tan(s).$$

**Resolução**

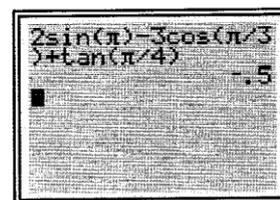
$$6.1 \quad 2 \sin(\pi) - 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \quad \sin \pi = 0$$

$$= 2 \times 0 - 3 \times \frac{1}{2} + 1 =$$

$$= 0 - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1$$



$$6.2 \quad \sin(p) + \cos(r) + \sin(t) + 2 \cos(q) + \tan(s) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{a}{a} =$$

$$\overline{DC} = a \text{ e } \overline{MD} = \frac{a}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{2a}{a} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} + 1 - \sqrt{2} + 2$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{2} + 3 = 3$$

**Verifique**

**6**

6.1 Indique o sinal do seno, do co-seno e da tangente de cada um dos seguintes ângulos:

a)  $220^\circ$ ;

b)  $1500^\circ$ ;

c)  $\frac{29\pi}{6}$  rad;

d)  $-\frac{3\pi}{4}$  rad;

e)  $-350^\circ$ ;

f)  $1$  rad;

g)  $1^\circ$ ;

h)  $\frac{23\pi}{4}$  rad.

(Verifique os resultados usando a calculadora.)

6.2 Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões.

Os ângulos estão expressos em radianos.

a)  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \tan(\pi) + 2 \cos(\pi) - \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right).$

b)  $-3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi) - 2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \tan 0 + \cos 0.$

6.3 Explique porque é que o seno e o co-seno de um ângulo  $\alpha$  qualquer nunca podem ser superiores a 1 nem inferiores a  $-1$ .